METODA NEWTONA

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ~~ug~~ $\mathcal{C}^1$

$$F(x) = x - Df(x)^{-1} f(x).$$

1° zbieżna, gdy startujemy blisko punktu $\bar{x}_*$, $f(\bar{x}_*) = 0$

2° trzeba odwracać $Df(x)$, lub przynajmniej ~~odwrócić~~ obliczyć $Df(x)^{-1} f(x)$.

3° x_0 - musi być izolowany, tzn. nie może być ciągłej rodziny rozwiązań $f(x) = 0$.

4° $F(x) = x - C f(x)$, $C \approx df^{-1}(x_0)$
o ile x_0 - blisko $\bar{x}$

też jest zbieżna.

Modyfikacje metody Newtona:

1) $F(x) = x - \theta \cdot Df(x)^{-1} \cdot f(x)$, $\theta \approx 1$ - też jest zbieżna
θ - parametr

2) $Df(x)^{-1}$ - można mieć stałe przez kilka iteracji

Metoda Newtona - wielowymiarowa

Założenia: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f \in C^2$

Szukamy zera f tj. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t. że $f(\bar{x}) = 0$

Zał.: $Df(\bar{x})$ jest nieosobliwa

Mamy przybliżenie zera x

Chcemy wyznaczyć h t. że $\bar{x} = x + h$

$$0 = f(\bar{x}) = f(x+h) \approx f(x) + Df(x) \cdot h$$

Jeśli x jest dostatecznie blisko $\bar{x}$ to $Df(x)$ nieosobliwe

i wtedy h wyznaczamy z równania

$$Df(x) \cdot h = -f(x) \qquad (*)$$

czyli

$$h = -Df(x)^{-1} f(x)$$

W praktyce nie odwracamy macierzy $Df(x)$

ale rozwiązujemy układ równań $(*)$ np. metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} Df(x) \cdot h = -f(x) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

Zbieżność

$n = 1$

Metoda Φ jest metodą iteracyjną rzędu co najmniej $p \geq 1$

Obliczanie punktu stałego ξ

$\exists U_\xi \; \exists C > 0 \; \forall x_0 \in U_\xi \; \forall k \geq 1 \quad \|x_{k+1} - \xi\| \leq C \|x_k - \xi\|^p$

$p = 1 \; C < 1$

Tw. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$

Dla zer pojedynczych metoda Newtona jest zbieżna co najmniej kwadratowo (jest rzędu 2)

Dla zer wielokrotnych jest co najmniej rzędu 1.

$n > 1$ Potrzeba dodatkowych założeń.

np.

Tw. $D \subset \mathbb{R}^n$, B - zbiór wypukły, $\overline{B} \subset D$

$f : D \to \mathbb{R}^n$ różniczkowalna $\forall x \in B$, ciągła na D

$x_0 \in B$

a) $\|f'(x) - f'(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \quad \forall x, y \in B$

b) dla każdego $x \in B$ macierz $f'(x)^{-1}$ istnieje i $\|f'(x)^{-1}\| \leq \beta$

c) $\|f'(x_0)^{-1} f(x_0)\| \leq \alpha$

d) $h = \frac{\alpha\beta\gamma}{2} < 1$

e) $r = \frac{\alpha}{1-h}$ $\quad S_r(x_0) \subset B$

wtedy 1) ciąg $x_{n+1} = x_n - f'(x_n) f(x_n)$ jest dobrze określony oraz $x_k \in S_r(x_0) \; \forall k > 0$

2) $\exists \lim_{k \to \infty} x_k = \xi$, $f(\xi) = 0$

3) $\|x_k - \xi\| \leq \alpha \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}}$

Rem

Ponieważ $h < 1$ to metoda Newtona jest zbieżna kwadratowo

MODYFIKACJA W WIELU WYMIARACH

np. w równaniach cząstkowych lub zwyczajnych

$$\ddot{X} - F(x) = 0 \qquad F - \text{~~fajne~~ wielom}$$

szukamy okresowych o okresie 2π

rozwijamy w szereg Fouriera

$$\vdots$$

$$n^2 a_n - F_n(a_1 \ldots) = 0$$

$$\vdots$$

zastępujemy, to

$$\vdots$$

$$a_n - \frac{1}{n^2} F_n(\ldots) = 0$$

"Główne" zmienne jak Newton

~~ut~~ dalsze jak "Banach"

$$F_1(x,y) = x \qquad (P)$$

$$F_2(x,y) = y$$

$$\tilde{N}(x,y) = \begin{pmatrix} x - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x,y) - Id\right)^{-1}(F_1(x,y) - x) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Widać, że

$\tilde{N}(x,y) = (x,y)$

wtw.

$F(x,y) = (x,y)$

Metody homotopii i kontynuacji

ZADANIE: $f(x) = 0$ szukamy $\underline{x}$

~~Metoda kontynuacji~~

Traktujemy nasze zadanie jako szczególny przypadek jednoparametrowej rodziny zadań z parametrem $t \in [0,1]$.

dla $t=1$ odpowiada ~~równanie~~ $f(x)=0$

dla $t=0$ -"- pewnemu $g(x)=0$ dla którego rozwiązanie znamy.

<u>Ogólnie:</u>

<u>Def.</u> Homotopią wiążącą funkcje $f, g : X \to Y$ jest ciągłe odwzorowanie

$$h : [0,1] \times X \to Y$$

t. że

$$h(0,x) = g(x) \qquad h(1,x) = f(x) \quad \forall x$$

Jeśli takie odwzorowanie istnieje to mówimy, że f i g są homotopijne.

Przykłady

$$h(t,x) = t f(x) + (1-t)\, g(x)$$

często

$$g(x) := f(x) - f(x_0) \quad \Rightarrow \quad g(x_0) = 0$$

wtedy $h(t,x) = t f(x) + (1-t)(f(x) - f(x_0)) =$

$$= f(x) + (t-1) f(x_0)$$

ZASTOSOWANIE DO METODY NEWTONA

Wybieramy ciąg punktów

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1$$

Próbujemy rozwiązać układy równań

$$h(t_i, x) = 0 \quad \text{dla } 0 < i \leq m$$

Jako punkt startowy dla metody Newtona dla układu $(i+1)$ przyjmujemy rozwiązanie dla układu i.

Układ $h(0, x) = g(x)$ wybieramy w ten sposób, aby rozwiązanie było znane.

\+ Dzięki temu unikamy konieczności posiadania dobrego przybliżenia zera dla $f(x)$.

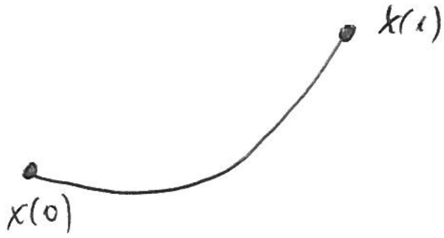
− Musimy wykonać wiele iteracji metody Newtona (dla każdego i przynajmniej kilka)

Krzywa rozwiązań

Jeśli $h(t,x)=0$ ma jedno rozw. dla $\forall t\in[0,1]$

to jest ono funkcją parametru t :

$x(t)$: $h(t,x(t))=0$



Wyznacza to pewną krzywą

$$\{x(t) : 0\le t\le 1\}$$

Jeżeli $x(t)$ i h są różniczkowalne to możemy różniczkować po t

$$h(t,x(t))=0$$

$$h_t(t,x(t))+h_x(t,x(t))\,x'(t)=0$$

Jeżeli $h_x(t,x(t))$ jest nieosobliwe to

$$x'(t)=-\left[h_x(t,x(t))\right]^{-1}h_t(t,x(t))$$

Dostajemy równanie różniczkowe na $x(t)$

$x(0)$ - znany.

Całkując otrzymujemy

$x(1)$ - szukane

Całkowanie numeryczne równań różniczkowych (wstęp)

Równania różniczkowe

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \quad (*) & x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Szukamy funkcji $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, różniczkowalnej dla której $(*)$ jest spełnione dla $\forall x$

Niektóre równania dają się rozwiązać analitycznie

np. (prosto) $x'(t) = -x(t)$

$x(t) > 0$. $\frac{x'(t)}{x(t)} = -1$ / całkujemy po t

$\ln x(t) = -t + c$

$x(t) = e^{-t+c} = \tilde{c}\, e^{-t}$

$x(0) = \tilde{c}\, e^{0} = \tilde{c} = x_0 \Rightarrow x_0 > 0$

$\boxed{x(t) = x_0 e^{-t}}$

Pozostałe przypadki prowadzą do tego samego.

Łatwo sprawdzić

np.

$x' = 2tx$

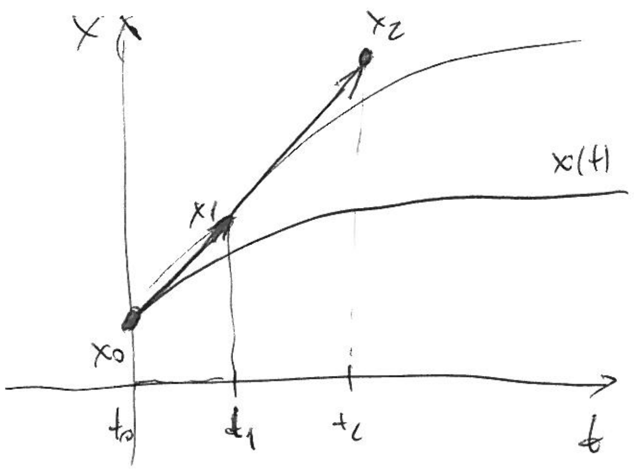
e^{t^2}

W większości przypadków zdani jesteśmy na przybliżone rozwiązania numeryczne (np. rozwiązanie nie wyraża się przez funk. element.)

Jest wiele metod całkowania równ. różniczkowych np.

- Eulera
- Runge-Kutty
- Taylora.

Metoda Eulera.



h - krok czasowy

$$t_i = t_0 + ih$$

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, t_n)$$

$$x'(t_n) = f(x_n)$$

To jest najprostsze metoda, często daje niedokładne wyniki, zwłaszcza dla dużych h.

Zbliżając się z $h \to 0$ ~~przybliżony~~ ~~wynik~~ rozwiązanie przybliżone x_n zbliża się do $x(t_n)$

Metoda Taylora

$x(0) = x_0 \qquad x' = f(x, t)$

$$x(h) = x_0 + x'(0)\cdot h + x''(0)\frac{h^2}{2!} + x'''(0)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

$x'(0) = f(x_0)$

$$x''(0) = \frac{d}{dt}x'\Big|_{t=0} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f(x_0,0)}{\partial x}\cdot f(x_0,0) + \frac{\partial f(x_0,0)}{\partial t}$$

$$= f_x f + f_t$$

$$x(h) = x_0 + f(x_0)\cdot h + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} f(x_0) + \frac{\partial f(x_0,0)}{\partial t}\cdot\frac{h^2}{2} + \ldots$$

- Wymaga liczenia pochodnych:
  - liczenie symboliczne wolne i mało wydajne
  - istnieją metody automatycznego różniczkowania.

⇒ trudniejsze do implementacji tak aby rząd nie był ustalony i funkcja dowolna.

Metody Rungego-Kutty

$$x(h) = x_0 + f(x_0,t)\,h + f_x f(x_0,0) + f_t(x_0,0)\,\frac{h^2}{2}$$

$$x(h) = x_0 + \frac{h}{2}\Big(\underbrace{f(x_0,0) + \big(f_x(x_0,0) f(x_0,0) + f_t(x_0,0)\big)\frac{h}{2}}_{} \Big)$$

$$f($$

$$\frac{h}{2} f + \frac{h}{2}\big(f + (f_x f + f_t)\,h \big)$$

$$f(t+h, \cancel{x} + fh)$$

$$x(h) = x_0 + \frac{h}{2} f(x_0,0) + \frac{h}{2} f(t+h, x+f\cdot h)$$

$$x(t+h) = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

$$F_1 = x + h f(x, t)$$

$$F_2 = h f(t+h, F_1)$$

Rzędu 2 zgodne z rozw. Taylora do rzędu 2

Klasyczna M. Rungego-Kutty rzędu 4

$$x(t+h) \simeq x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

$$F_1 = h f(t, x)$$

$$F_2 = h f(t + \tfrac{1}{2}h, x + \tfrac{1}{2}F_1)$$

$$F_3 = h f(t + \tfrac{1}{2}h, x + \tfrac{1}{2}F_2)$$

$$F_4 = h f(t + h, x + F_3)$$

$\boxed{P}$

$$f(a,b) = \begin{bmatrix} a^2 - 3b^2 + 3 \\ ab + 6 \end{bmatrix}$$

$x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $x_0 = (1,1)$

$$g(\cancel{a,b}) = f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$h(t, \cancel{x}) = f(x) + (t-1) f(\cancel{x_0})$$

$$h_x(t,x) = \begin{bmatrix} 2a & -6b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad h_x^{-1}(t,x) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a & 6b \\ -b & 2a \end{bmatrix} \qquad \Delta = 2a^2 + 6b^2$$

$$h_t(t,x) = f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x'(t) = -\left[h_x(t,x)\right]^{-1} h_t(t,x)$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = -\frac{1}{2a^2+6b^2}\begin{bmatrix} a + 42b \\ -b + 14a \end{bmatrix}$$

$\Big\downarrow$ ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO

$$x(1) = (-2{,}961,\ 1{,}976)$$

$\Big\downarrow$ Metoda Newtona

$$x(1) = (-3, 2)$$

TW. DLA HOMOTOPII

Jeśli funkcja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1

i $\| f'(x)^{-1} \| \le M \quad \forall_{x \in \mathbb{R}^n}$ to

$\forall_{x_0 \in \mathbb{R}^n}$ istnieje jedna krzywa $\{x(t) : 0 \le t \le 1\}$

t. że $f(x(t)) + (t-1) f(x_0) = 0$ dla $0 \le t \le 1$.

Funkcja $t \to x(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$x' = -[f'(x)]^{-1} f(x_0)$$
$$x(0) = x_0$$

Dowód: ĆW

Druga metoda (Garcia, Zangwill)

$$y = (t, x)$$

$$h(y) = 0$$

$h(y(s)) = 0$ } t jest teraz funkcją zmiennej s

$h_y(y(s)) \cdot y'(s) = 0$ ← równanie różniczkowe

$\uparrow$ ~~y(0)~~ $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}$

$h: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$
więc to jest macierz $n \times (n+1)$

zmiana postaci równania

Lemat:
Niech A - macierz $n \times (n+1)$
Rozw. równania $Ax = 0$ jest dane wzorem
$x_j = (-1)^j \det A_j$ (gdzie A_j jest macierzą bez j kolumny)

Dowód.
Wybieramy dowolny wiersz i dodajemy jego kopię [na] górę $\Rightarrow$ macierz B $(n+1) \times (n+1)$ } $\det B = 0$
Rozwijamy wyznacznik względem 1 wiersza

$$0 = \det B = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{ij} \det A_j = -\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j$$

co oznacza że i element w iloczynie $(Ax)_i = 0$
Ponieważ to jest prawda dla $i = 1, \dots n$ $\Rightarrow Ax = 0$

$y_j'(s) = (-1)^j \det A_j$ $A = h_y(y(s))$

Zyski:

— krzywa funkcji może być bardzo skomplikowana

istnieje więcej niż jedno zero!

P

$$f(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 - 3b^2 + 3 \\ ab + 6 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = (1,1)$$

$$f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$h(t,x) = f(x) + (t-1) f(x_0)$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - 3b^2 + 2 + t \\ ab - 1 + 7t \end{pmatrix}$$

$$h'(y)\, y'(s) = \begin{pmatrix} 1 & 2a(s) & -6b(s) \\ 7 & b(s) & a(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'(s) \\ a'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$t'(s) = 2a^2 + 6b^2$$

$$a'(s) = a - 42b$$

$$b'(s) = b - 14a$$

$\Downarrow$ całkowanie numeryczne

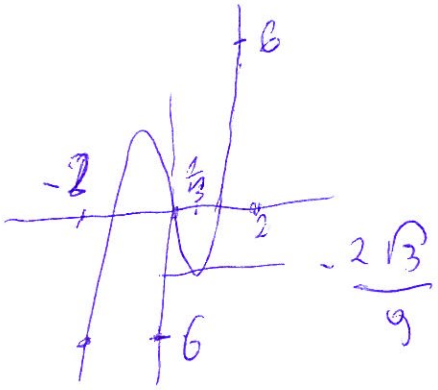
$s = 0.087 \quad t = 0.969 \quad a = -2.94 \quad b = 1.97$

PRZYKŁAD HOMOTOPII

Wielomian

$$f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$$

ma taki wykres:



~~Nasza homotopia.~~

Mamy rozwiązać problem $f(x) - 6 = 0$

i zaczynamy z $x_0 = -2$ $\quad f(x_0) = -6$

Homotopia:

$$H(t,x) = f(x) - 6 + (t-1)(f(x_0) - 6) =$$

$$= f(x) - 6 - 12(t-1) = f(x) - 12t + 6$$

$$H(t,x) = f(x) - 12t + 6$$

nowa zmienna $-12t + 6 = \tilde{t}$

$t \in [0,1]$ $\quad , \tilde{t} \in [6,-6]$

Równanie różniczkowe:

$$\frac{d}{ds} H(t(s), x(s)) = -12 \cdot t' + (3x^2-1)x'$$

czyli element z jądra:

$$\begin{bmatrix} 3x^2-1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

czyli równanie różniczkowe:

$$\begin{cases} t' = 3x^2-1 \\ x' = 12 \end{cases}$$

warunek początkowy:

$$\begin{cases} t(0) = 0 \\ x(0) = x_0 = -2 \end{cases}$$

chcemy dojść do $t=1$

NORMA LOGARYTMICZNA MACIERZY

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mu(A) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\|I + hA\| - I}{h}$$

granica istnieje

może być ujemna!!!

WCHODZI DO OSZACOWAŃ NA BŁĄD RÓW. RÓŻ. ZWYCZAJNYCH: $x' = f(x)$ (1)

Φ – metoda różnicowa

$\varphi(t, x)$ – rozwiązanie (1), to

jeśli

$$|\Phi(h, x) - \varphi(h, x)| \leq C h^{r+1}$$

r – rząd metody

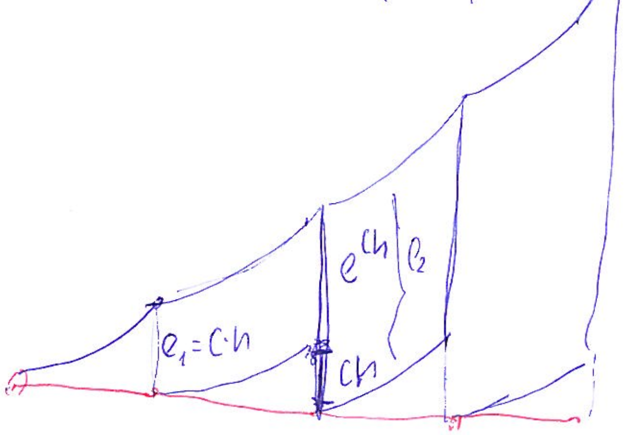
wtedy

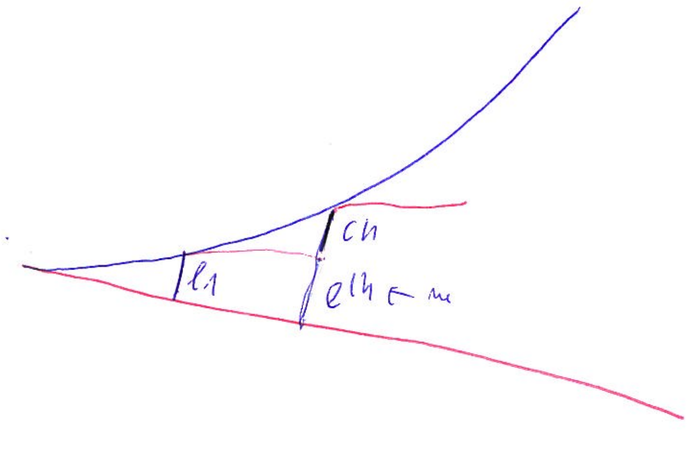
$$|\Phi(kh, x) - \varphi(\underset{\overset{\shortparallel}{T}}{k \cdot h}, x)| \leq \frac{e^{\mu(df)T} - 1}{\mu(df)} \cdot C \cdot h^r$$

$$e_2 = e^{Lh} \cdot e_1 + C \cdot h$$

← z rozumowanie różniczkowe

$x_1 = \Phi_h(x_0)$ $\quad X_2 = \Phi_h(\Phi_h(x_0$





$L(u - v)$

$\langle Lu - Lv \mid u - v)$

TAYLORA METODA DLA RÓWNAŃ ZWYCZAJNYCH - RÓŻNICZKOWANIE AUTOMATYCZNE

Działamy na rozwinięciach w szeregu.

$$p(t+h) = \sum \frac{p^{(k)}(t)}{k!} \cdot h^k = \sum p^{[k]}_{(t)} h^k$$

tego argumentu nie będę dalej pisał.

$$x' = f(x(t))$$

$$x^{(2)} = \frac{d}{dt} f(x(t))$$ ← zależy od znanych poprzednich pochodnych

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{[i]}(0) t^i\right) = \sum F^{[i]}(0) t^i$$, gdzie

$$F = f \circ x.$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) x^{[i+1]}(0)\right)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{[i]}(0) t^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} i\, x^{[i]} t^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) x^{[i+1]}(0) t^i$$

czyli $$x^{[i+1]}(0) = \frac{1}{i+1} F^{[i]}(0)$$

$$x^{[0]} = x_0$$

Trzeba umieć generować
$$F^{[i]} = (f \circ x)^{[i]}$$

f - składa się z elementarnych operacji arytmetycznych i funkcji elementarnych np. e^x, $\sin(x)$, ...

Potrzeba nam reguł na to aby gdy mamy szeregi na wejściu do takiej operacji elementarnej wygenerować szereg na wyjściu.

PRZYKŁAD KILKU TAKICH REGUŁ

1) $r = p \pm q$, to $r^{[i]} = p^{[i]} \pm q^{[i]}$, $i = 0, 1, \ldots, k$

2) $r = p \cdot q$, to $r^{[i]} = \sum_{j=0}^{i} p^{[j]} q^{[i-j]}$, $i = 0, 1, \ldots, k$

na poziomie pochodnych to jest reguła Leibnitza.

3) $r = \frac{p}{q}$, to $r^{[i]} = \frac{1}{q^{[0]}} \left(p^{[i]} - \sum_{j=0}^{i-1} r^{[j]} q^{[i-j]} \right)$

bo

$r\, q = p$

$$\sum_{j=0}^{i} r^{[j]} q^{[i-j]} = p^{[i]}$$

$$r^{[i]} q^{[0]} + \sum_{j=0}^{i-1} r^{[j]} q^{[i-j]} = p^{[i]}$$

znany znany

4) $r = e^{u}$

Oczywisty sposób:

$e^{u} = \sum \frac{u^{n}}{n!}$ nie bardzo się nadaje

lepiej tak

$$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$$

czyli

$$r' = r \cdot u'$$

$$(i+1)\, r^{[i+1]} = \left(r \cdot u'\right)^{[i]}$$

$$r^{[i+1]} = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i} r^{[j]} (u')^{[i-j]} = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i} r^{[j]} (j-i+1)\, u^{[j-i+1]}$$

5) $r = \ln u$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

6) $r = \sin u$ lub $r = \cos u$

wyliczamy w parze

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

czyli $r_s = \sin u$

$r_u = \cos u$

$$r_s' = r_u \cdot u'$$

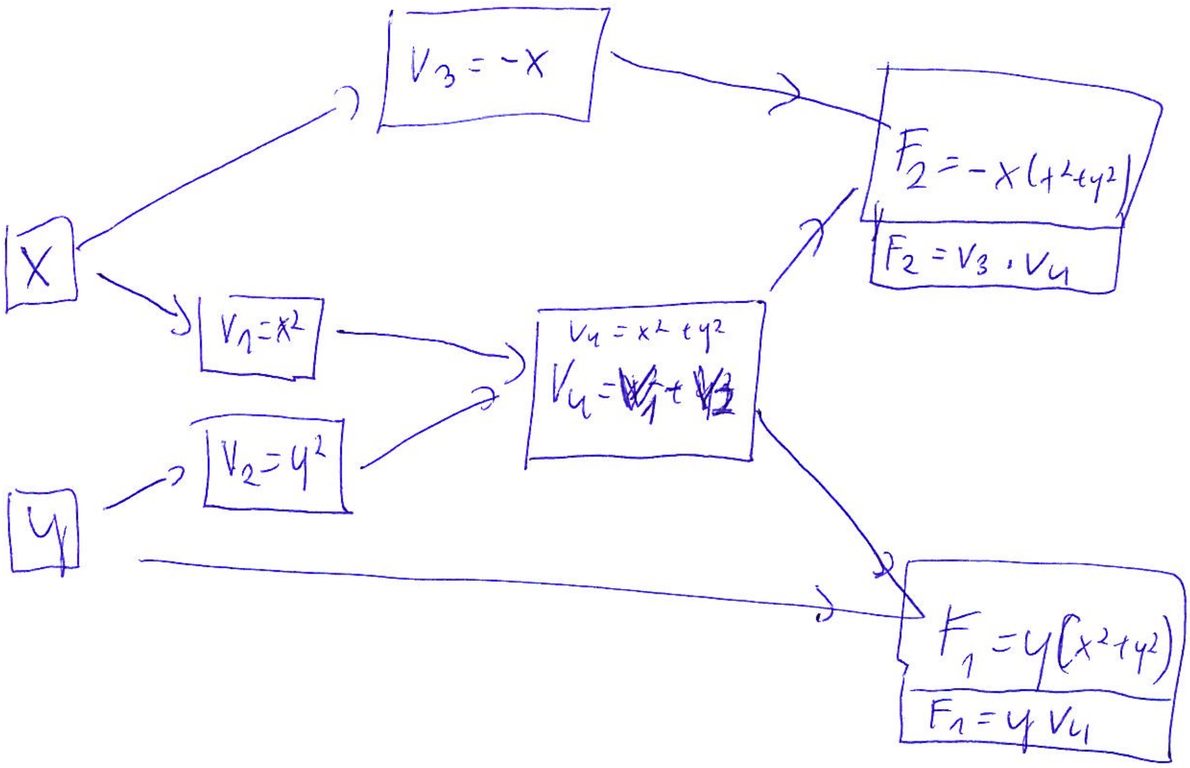
$$r_u' = -r_s \cdot u'$$

7) Potęgi $r = u^\alpha$

$$r' = \alpha u^{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{u} u^\alpha = \frac{\alpha}{u} r$$

$$\dot{x} = y(x^2+y^2)$$

$$\dot{y} = -x(x^2+y^2)$$



warunek początkowy

$x_0 = 1$

$y_0 = -1$

$$V_1^{[0]} = x^{[0]} \cdot x^{[0]} = 1$$

$$V_2^{[0]} = y^{[0]} \cdot y^{[0]} = 1$$

$$V_3^{[0]} = -x^{[0]} = -1$$

$$V_4^{[0]} = V_1^{[0]} + V_2^{[0]} = 2$$

$$F_2^{[0]} = V_3^{[0]} \cdot V_4^{[0]} = -2$$

$$F_1^{[0]} = y^{[0]} \cdot V_4^{[0]} = -1 \cdot 2 = -2$$

zatem ponieważ

$$x^{[i+1]}$$
$$y^{[i+1]} = \frac{1}{i+1} F^{[i]}(0)$$

czyli dla $i=0$

$$x^{[1]} = \frac{1}{1} F_1^{(0)}$$
$$y^{[1]} = F_2^{(0)}$$

$$x^{[1]} = -2 \quad , \; y^{[1]} = -2$$

$$V^{[1]} = 2 \cdot x^{[0]} \cdot x^{[1]} = -4$$

$$V^{[2]} = 2 \cdot y^{[0]} y^{[1]} = 4$$

$$V_3^{[1]} = -x^{[1]} = 2$$

$$V_4^{[1]} = V_1^{[1]} + V_2^{[1]} = -0$$

$$F_1^{[1]} = y^{[0]} V_4^{[1]} + y^{[1]} V_4^{[0]} = -1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = -4$$

$$F_2^{[1]} = V_3^{[0]} \cdot V_4^{[1]} + V_3^{[1]} \cdot V_4^{[0]} = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$$

$$x^{[2]} = \frac{1}{2} F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2} F_2^{[1]} = 2$$