Modelowanie systemów liczących. Ćwiczenie 2.

1. Rozkłady i dystrybuanty w programie MATLAB

Do odczytywania wartości prawdopodobieństwa typu $P(X = X_a)$ przy ustalonym rozkładzie oraz zadanej wartości zmiennej losowej X_a, należy użyć odpowiedniej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Są to wszystkie funkcje, których nazwa kończy się znakami pdf (ang. *probability density function*). W programie MATLAB są do dyspozycji następujące funkcje gęstości rozkładów prawdopodobieństw (Y):

- `binopdf(X, N, P)` - funkcja gęstości rozkładu dwumianowego. Zwraca prawdopodobieństwo X sukcesów dla N powtórzeń, N jest liczbą powtórzeń, P prawdopodobieństwem sukcesu;
- `ch2pdf(X, V)` - funkcja prawdopodobieństwa rozkładu chi-kwadrat, gdzie X jest wartością zmiennej losowej, V - liczbą swobody;
- `exppdf(X, MU)` - funkcja gęstości rozkładu wykładniczego, gdzie MU jest dodatnim parametrem;
- `fpdf(X, V1, V2)` - funkcja gęstości rozkładu F-Snedocecora z liczbą V1 stopni swobody licznika i liczbą V2 swobody mianownika;
- `gampdf(X, A, B)` - funkcja gęstości rozkładu gamma, z parametrem kształtu A i parametrem skali B;
- `geopdf(X, P)` - funkcja gęstości rozkładu geometrycznego z prawdopodobieństwem P;
- tt hygepdf(X, M, K, N) - funkcja gęstości rozkładu hipergeometrycznego, gdzie X jest liczbą sukcesów, M - liczebnością populacji, K - liczbą elementów spełniających określone kryterium, N - - liczebnością próbki;
- `nbindpdf(X, R, P)` - funkcja gęstości rozkładu dwumianowego z prawdopodobieństwem P i parametrem koncentracji R;
- `ncfpdf(X, NU1, NU2, DELTA)` - funkcja gęstości rozkładu F z parametrem $DELTA$;
- `nctpdf(X, V, DELTA)` - funkcja gęstości rozkładu t-Studenta z parametrem $DELTA$;
- `ncx2pdf(X, V, DELTA)` - funkcja gęstości chi-kwadrat z parametrem $DELTA$;
- `normpdf(X, MU, SIGMA)` - funkcja gęstości rozkładu normalnego z wartością średnią MU i odchyleniem standardowym $SIGMA$;

- `poissonpdf(X, LAMBA)` - funkcja gęstości rozkładu Poissona z parametrem $LAMBA$;
- `ray1pdf(X, B)` - funkcja gęstości rozkładu Rayleigha z parametrem B;
- `tpdf(X, V)` - funkcja gęstości rozkładu t-Studenta liczbą V stopni swobody;
- `unidpd(X, A, B)` - rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej dyskretnej, dla rozkładu jednostajnego, n-punktowego;
- `unifpdf(X, A, B)` - funkcja gęstości dla rozkładu jednostajnego, dla zmiennej losowej ciągłej w przedziale $< A, B >$;
- `weibdf(X, A, B)` - funkcja gęstości dla rozkładu Weibulla z parametrem A i B;

2. Przebieg ćwiczenia

Zadanie 1

Wyznaczyć $P(\chi^2 < \chi^2)$ dla $n = 19$, jeżeli $\chi^2_a = 27.1$.

Rozwiązanie

Naley użyć funkcję dystrybuanty `chi2cdf(27.1, 19)` dla rozkładu chi-kwadrat, a mianowicie

```
>> chi2cdf(27.1, 19)

ans =

    0.8977
```

Zadanie 2

Wyznacz $P(| X |< 1)$ dla rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Rozwiązanie

Aby znaleźć $P(| X |< 1)$ należy użyć funkcji dystrybuanty dla rozkładu normalnego, a mianowicie `normcdf(X, MU, SIGMA)` i odczytać obydwie wartości prawdopodobieństwa

$>>$ `normcdf([-1 1], 0, 1)`

ans =

0.1587   0.8413

$>>$ 0.8413 - 0.1587

ans =

0.6826

Zadanie 3

Prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwej sztuki towaru wynosi $p = 0.05$. Wybrano losowo próbę o liczebności $n = 100$. Niech X_n będzie liczbą sztuk wadliwych w próbce. Obliczyć $P(X_n = 9)$.

$>>$ `1 - binocdf(9, 100, 0.05)`

ans =

0.0282

Zadanie 4

W skład aparatury wchodzi między innymi $n = 1000$ elementów określonego rodzaju. Prawdopodobieństwo uszkodzenia każdego z tych elementów w określonym czasie jest $p = 0.001$ i nie zależy od pozostałych elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia co najwyżej 3 elementów w określonym czasie.

Rozwiązanie

Zmienna losowa ma rozkład dwumianowy, ale dla dużej liczby n przyjmujemy, że zmienna losowa ma rozkład Poissona. A zatem $\lambda = np = 1000 * 0.001 = 1$. Aby policzyć $P(X = 3)$, należy wykorzystać dystrybuantę `poisscdf(X, LAMBDA)`:

$>>$ poisscdf(3, 1)

ans =

0.9810

Zadanie 5

Sporządź wykres gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego z wartością średnią $MU = 65$ i odchyleniem standardowym $SIGMA = 15$.

Rozwiązanie

```
global MU SIGMA

MU = 65;
SIGMA = 15;

npoints = 100;
parameter = 3.5;
low = MU - parameter* SIGMA;
high = MU + parameter * SIGMA;
interval = (high - low) / npoints;

x = low : interval : high;
```

fx = 1/(SIGMA $*$ sqrt(2 $sqrt(2 * \pi)) * \exp(-1/2 * ((x - MU)/SIGMA)$. ^2);

```
plot(x, fx)
xlabel('Random variable - x')
ylabel('f(x)')
grid

Pn = quad8('normal', -100, 300);

 disp(' ')
 disp*[blanks(5), 'Area under the Normal Distribution : '])
 disp(' ')
 disp([blanks(5),' P(x>0)=', num2str(Pn)])
```

```
disp(' ')

mean_normal = quad8('normalf', low-parameter * SIGMA, high+parameter* SIGMA);
var_normal = quad8('normals', low-parameter * SIGMA, high+parameter * SIGMA);

disp(' ')
disp([blanks(5), 'First moment of Normal Distribution PDF : '])
disp(' ')
disp([blanks(6),' P(x>0)= ', num2str(mean_normal)])
disp(' ')
```

Zadanie 6

Sporządź wykres ujemnego rozkładu wykładniczego.

Rozwiązanie

```
global BETA

x=0:.1:10;

BETA = 5;

fx = 1/BETA*exp(-x/BETA);

plot(x,fx)
xlabel('Random variable - x')
ylabel('f(x)')
grid

Pn=quad8('negexp',5,200);
disp(' ')
disp([blanks(5),'Area under the Negative Exponential Distribution f(x) : '])
disp(' ')
disp([blanks(5),' P(x>0)=',num2str(Pn)])
disp(' ')

mean_negexp = quad8('negexpf',0,100);
var_negexp = quad8('negexps',0,100);
```

```
disp(' ')
disp([blanks(5),'First Moment of Neg. Exp. PDF : '])
disp(' ')
disp([blanks(5),' P(x>0)=',num2str(mean_negexp)])
disp(' ')
```

Zadanie 7

Sporządź wykres funkcji gęstości rozkładu gamma, z parametrem kształtu A i parametrem skali B.

Rozwiązanie

```
global A B

A = 1;
B = 2;

npoints = 100;
parameter = 4;
means = A/B;
sigma = sqrt(A/B^2);
low = 0;
high = means + parameter* sigma;
interval = (high - low) / npoints;

x=low:interval:high;

fx = B^A * x.^(A-1) .* exp(-B .* x) / gamma(A);

plot(x,fx)
xlabel('Random variable - x')
ylabel('f(x)')
grid
Pn=quad8('gammad',low,high);

disp(' ')
disp([blanks(5),'Area under the Gamma Distribution : '])
disp(' ')
disp([blanks(5),' P(x>0)=',num2str(Pn)])
```

```
disp(' ')

mean_gamma = quad8('gammadf',0,100);
var_gamma = quad8('gammads',0,100)
```