APROKSYMACJA.

PROBLEM:

X - prz. Banacha

$F \subset X$ - podprz. $\dim F < +\infty$

$u \notin F$,

Szukam $v \in F$ tak aby

$$\|u - v\| = \inf_{y \in F} \|u - y\|.$$

Jeśli takie v istnieje, to v nazywamy <u>elementem optymalnym</u>

$$\varrho_F(u) = \inf_{y \in F} \|u - y\|$$ – <u>błąd aproksymacji</u>

W dalszym ciągu X – unormowana

lub X – unitarna $(\cdot|\cdot): X \times X \longrightarrow \mathbb{C}, \mathbb{R}$

$$(\alpha x | y) = \alpha (x | y)$$

$$\overline{(x|y)} = (y|x)$$

PRZYKŁADY:

1) $C([a,b], \mathbb{R})$ z normą $\|x\| = \max\{|x(t)|, t \in [a,b]\}$

2) $\Pi_n = \operatorname{span}\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

3) prz. funkcji ciągłych okresowych itp.

4) $L^2_p[a,b] = \{$ przestrzeń funkcji $\int |u|^2 p(x)\,dx < +\infty\}$

$p: [a,b] \to \mathbb{R}_+$ ← mierzalna

<u>mierzalna</u>

TW. 1 (istnienie)

X - Banacha, $F \subset X$, $\dim F < \infty$. Wtedy
$\forall u \in X$ istnieje element optymalny względem F.

DOWÓD:

jeśli $h \in F$ i $\|h\| > 2\|u\|$, to
$\|u-h\| \geq \|h\| - \|u\| > \|u\| = \|u-0\| \geq \mathcal{E}_F(u) = \inf\limits_{y \in F} \|u-y\|$.

Zatem $0 \in F$ jest lepszym przybliżeniem niż h.

Zatem ~~inf~~ $\mathcal{E}_F(u) = \inf\limits_{y \in F \cap \overline{K(0, 2\|u\|)}} \|u-y\|$.

zbiór $F \cap \overline{K(0, 2\|u\|)}$ - jest zwarty ($\Leftarrow$ tutaj wchodzi założenie $\dim F < +\infty$)

więc to min jest przyjęte. $\boxed{\text{CND}}$

UWAGA:

Nie ma jednoznaczności.

1) $\mathbb{R}^2$ z normą $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

$F = \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$

$u = (1,1)$. Wtedy ~~elementem optymalnym~~

$x \in F$ $\|u - x\| = \max(|1-x_1|, 1) \geq 1$.
przyjęte dla
$(x_1, 0)$, gdzie $x_1 \in [0, 2]$.

TW. 2. (~~jeśli~~ (dla unitarnych)

Jeśli X - unitarna, $F \subset X$, $\dim F < +\infty$,

to $\forall u \in X$, $\exists! v$ v - element optymalny dla u ~~$v\in F$~~

$v \in F$ gdy $\dim F$

wtw

(*) ~~(u-v)~~ $(u - v \mid y) = 0 \quad \forall y \in F$

(czyli $u - v \perp F$.

Dowód:

$\Rightarrow$ Nie wprost. $v \in F$ - optymalny oraz $\exists h \in F$ $(u - v \mid h) = \alpha \neq 0$. możemy założyć, że $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

$v_1 = v + \beta h$, $\beta \in \mathbb{R}$, będzie dobrany później

$$\|u - v_1\|^2 = (u - v - \beta h \mid u - v - \beta h) =$$

$$= \|u - v\|^2 - 2(u - v \mid \beta h) + \beta^2 \|h\|^2 =$$

$$= \|u - v\|^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \|h\|^2 < \|u - v\|^2$$ dla β - dostatecznie małych

np. $\beta = \frac{\alpha}{\|h\|^2}$

$$= \|u - v\|^2 - 2\frac{\alpha^2}{\|h\|^2} + \frac{\alpha^2}{\|h\|^4}\|h\|^2 = \|u - v\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|h\|^2}.$$

v - nie jest optymalny.

$\Leftarrow$ ~~(u-v)~~ $(u - v \mid y) = 0 \quad \forall y \in F$.

$$\|u - y\|^2 = \|(u - v) + (v - y)\|^2 = \|u - v\|^2 + \|v - y\|^2 + 2\overbrace{(u - v \mid \underbrace{v - y}_{F})}^{=0} =$$

$$= \|u - v\|^2 + \|v - y\|^2 \geq \|u - v\|^2, \quad = \text{ wtw } v = y.$$

WNIOSEK.
Przy założeniach TW. 2 - mamy jednoznaczność elementu optymalnego.

WNIOSEK 2.

X - unitarna, $F = \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$, f_i - lin. niezależne

~~jeśli~~ $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$ - optymalny dla u

wtw α_j spełniają układ równań

(i) $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (f_j | f_i) = (u | f_i)$ $i = 1, \dots, n$.

Dowód:

v - optymalny $\overset{tw. 2}{\iff}$

$\overset{TW. 2}{\cancel{\ }}$ $(u - v | f_i) = 0$ $\forall_i$ $\iff$

$(u | f_i) = (v | f_i)$ $\forall_i$ $\iff$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (f_j | f_i) = (u | f_i)$.

UWAGA:

Macierz $G_{ij} = (f_i | f_j)$ jest hermitowska i nieosobliwa.

Przez ortogonalizację Grama-Schmidta możemy uczynić G - diagonalny.

PRZYKŁADY:

1) $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ortogonalne na $[-\pi, \pi]$
z wagą $p(x) \equiv 1$ w $L^2[-1, 1]$

2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}$ - ortogonalne na $[-\pi, \pi]$

WIELOMIANY ORTOGONALNE:

Dla dowolnych $[a,b]$ i $\rho : [a,b] \to (0,\infty)$

dopuszczamy przedział nieskończony; przynoszalne

$\Pi_n \subset L^2_\rho[a,b]$

wielomiany stopnia $\leq n$.

DEF.
Ciąg wielomianów $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \Pi_n$, $\deg P_k = k$ nazywam ciągiem <u>wielomianów ortogonalnych</u> (na $[a,b]$ z wagą ρ) jeśli jest spełniony warunek ~~warunek~~

$$(P_k | P_j) = \int_a^b \rho(x) P_k(x) P_j(x)\, dx = 0 \quad \text{dla } k \neq j$$

UWAGA:
Ciąg taki istnieje — proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

TW. (własności wielomianów ortogonalnych).

1) $\Pi_n = \operatorname{span}\{P_0, \ldots, P_n\}$

2) Jeśli $Q_j \in \Pi_j$, $j < k$, to $(Q_j | P_k) = 0$

3) $\{P_n\}$ wyznaczony jednoznacznie z dokł. do czynnika skalarnego.

4) $P_k(x) = (\alpha_k x + \beta_k) P_{k-1}(x) + \gamma_k P_{k-2}$

gdzie $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ - stałe

5) Miejsce zerowe wiel. orto. ~~na~~ $[a,b]$ są pojedyncze i leżą w (a,b).

Dowód:

1), 2), 3) - oczywiste.

Ad 4). Niech $p_j(x) = a_j x^j +$ wyrazy niższego stopnia $a_j \neq 0$

Zatem $p_k - \frac{a_k}{a_{k-1}} x p_{k-1} \in \Pi_{k-1}$

Oznaczmy: $\alpha_k = \frac{a_k}{a_{k-1}}$ oraz $p_k - \alpha_k x p_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} b_j p_j$.

trzeba pokazać, że $b_0 = b_1 = \ldots = b_{k-3} = 0$.

Mamy $(p_k - \alpha_k x p_{k-1} | p_j) = b_j \|p_j\|^2$ dla $j = 0, \ldots, k-1$. Ale

$(p_k - \alpha_k x p_{k-1} | p_j) = \underbrace{(p_k | p_j)}_{=0} - \alpha_k (x p_{k-1} | p_j) =$

$= -\alpha_k (p_{k-1} | x p_j) = 0$, gdy $j < k-2$ bo $x p_j \in \Pi_{k-2}$

ważne!!!

stąd $b_0 = b_1 = \ldots = b_{k-3} = 0$

czyli

$p_k = \alpha_k x p_{k-1} + b_{k-1} p_{k-1} + b_{k-2} p_{k-2} =$

$= (\alpha_k x + b_{k-1}) p_{k-1} + b_{k-2} p_{k-2}$.

Ad 5)

Przypuśćmy, że P_k zmienia znak w punktach $z_s \in (a,b)$, $s = 1,\dots,j$. Trzeba pokazać, że $j = k$.

~~Niech~~ Załóżmy, że $j < k$.

$$w_j = \prod_{s=1}^{j} (x - z_s) \in \Pi_j$$

$$0 = (w_j | P_k), \text{ ale } (w_j | P_k) = \int_a^b p(x) \underbrace{w_j(x) P_k(x)}_{\text{ma stały znak na } (a,b)} \neq 0$$

sprzeczność.

$\boxed{\text{///}}$

PRZYKŁADY WIELOMIANÓW ORTOGONALNYCH

1) Wielomiany Legendre'a

$$P_0(x) = 1, \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k$$

$\{P_k\}$ - ortogonalne w $L^2_p[-1,1]$ z wagą $p(x) \equiv 1$
(nie są ortonormalne, bo nie są unormowane)

Dowód: (rachunkowy)

Reguła trójczłonowa:

$$P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x)$$

2) Wielomiany Hermite'a

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{d\cancel{x}^k} e^{-x^2} \quad , \text{ waga } \rho(t) = e^{-x^2} \text{ na } (-\infty, \infty)$$

$$H_k(x) = 2x H_{k-1}(x) - (2k-2) H_{k-2}(x) \quad , k = 1, 2, \dots$$

$$H_0(x) = 1 \qquad \|H_k\|^2 = \sqrt{\pi}\, 2^k k!$$

3) Wielomiany Czebyszewa

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x) \qquad x \in [-1, 1]$$

$x = \cos t$

$T_k(x)$ - to jest wyrażenie na $\cos(kt)$ za pomocą $\cos t$ np.

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 \implies T_2 = 2x^2 - 1$$

$$\cos 3t = \cos 2t \cdot \cos t - \sin 2t \cdot \sin t = (2\cos^2 t - 1)\cos t - 2\sin^2 t \cdot \cos t =$$
$$= 2\cos^3 t - \cos t - 2(1 - \cos^2 t) \cdot \cos t =$$
$$= 4\cos^3 t - 3\cos t$$
$$\Downarrow$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

~~jest to~~ inne podejście: (zgrabniejsze)

zachodzi:

$$\cos kt + \cos(k-2)t = 2\cos t \cdot \cos(k-1)t$$

Dowód:

$$e^{ikt} + e^{i(k-2)t} = e^{i(k-1)t} \underbrace{\left(e^{it} + e^{-it}\right)}_{2\cos(t)}$$

biorąc ~~Re~~ części rzeczywiste mamy: teza. ~~cos t~~

$$\cos kt + \cos(k-2)t = 2\cos t \cdot \cos(k-1)t$$

$$T_k(x) + T_{k-2}(x) = 2 \cdot x \cdot T_{k-1}(x)$$

$$T_k(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

~~stąd~~

$T_0 = 1$, $T_1(x) = x$

zatem $T_k(x)$ - wielomian k-tego stopnia

$T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

Własności wielomianów Czebyszewa

1) T_k - ortogonalne w $L_{\rho}^2[-1,1]$ z wagą $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ D: patrz dalej

2) $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$ D: patrz dalej

3) $T_k(x) = 2^{k-1} x^k$ + człony niższych rzędów $k > 0$

4) zera x_j wielomianów T_k:

$T_k(x) = 0$ $\cos(k \arccos x) = 0$

$k \arccos x = -\frac{\pi}{2} + j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$

$\arccos x_j = \frac{(2j-1)\pi}{2k}$, $j = 1, \dots, k$, bo $\arccos \in (0, \pi)$

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2k}\right).$$

Dowody własności wielomianów Czebyszewa.

1) T_k - ortogonalne w $L_p[-1,1]$ z wagą $p(t)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dowód:

Mamy policzyć:

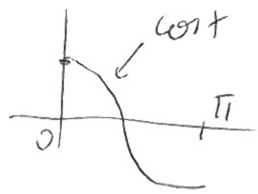
$$\int_{-1}^{1} T_k(x)\cdot T_l(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad T_k(x)=\cos(k\arccos x)$$

robimy podstawienie $t=\arccos x$

wtedy $\cos t = x$

$$-\sin t = \frac{dx}{dt}$$

$$-\sin t\,dt = dx$$



$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t$$

Zatem

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)\cdot T_l(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\pi}^{0}\cos(kt)\cos(l\cdot t)\frac{-\sin t}{\sin t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\cos(kt)\cdot\cos(lt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(k+l)t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(k-l)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{-\sin(k+l)t}{k+l}\Big|_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{-1}{k-l}\sin(k-l)t\Big|_0^{\pi}}_{=0}$$

o ile $k+l\neq 0$ o ile $k-l\neq 0$

tak więc

$$\int_{-1}^{1} T_k(x) T_l(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \qquad \text{gdy } k \neq l.$$

gdy $k = l$ mamy:

1) $k = l = 0$

$$\int_{-1}^{1} T_k(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} dt = \pi$$

$$\text{''} \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(0 \cdot t) dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(0 \cdot t) dt$$

2) $k = l \neq 0$

$$\int_{-1}^{1} T_k(x) T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(k-k)t \, dt = \frac{\pi}{2}$$

2) $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$

Dowód:

zachodzi jest $\cos t = x$, to $\cos(\pi - t) = -x$

zatem $\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x}$

stąd

$$T_k(-x) = \cos(k \arccos(-x)) = \cos(k\pi - k \arccos x) =$$

$$= \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} \cdot \cos(k \arccos x) + \underbrace{\sin(k\pi)}_{0} \cdot \sin(k \arccos x) =$$

$$= (-1)^k T_k(x).$$

Inny dowód z reguły ~~dwu~~ trójczłonowej:

$T_k(x) = 2x\,T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

załóżmy, że ~~za~~ tw. jest słuszne dla $0, 1, \dots, k-1$

wtedy:

$T_k(-x) = 2(-x)\,T_{k-1}(-x) - T_{k-2}(-x) = (-1)^k\, 2x\,T_{k-1}(x) - (-1)^{k-2}T_{k-2}(x)$

$= (-1)^k \left(2x\,T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)\right) = (-1)^k\, T_k(x).$

zachodzi dla $0, 1$, stąd teza

3) Wyraz przy najwyższej potędze:

$T_k(x) = 2^{k-1}x^k +$ człony niższych rzędów

zachodzi dla $k=1$

~~$T_k(x)$~~ załóżmy, że zachodzi dla $1, 2, \dots, k-1$

$T_k(x) = 2x\,T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

to jest niższego stopnia więc nie ma znaczenia

$= 2x \cdot 2^{k-2}x^{k-1} + \dots = 2^{k-1}x^k + \dots$

5° Punkty ekstremalne

$T_k(y_j) = (-1)^j$

przyjęte dla $\cos(k \arccos x) = \pm 1$

$$k \arccos x = j \cdot \pi$$

$$\arccos x = \frac{j\pi}{k}$$

$$\cancel{x}\, y_j = \cos\frac{j\pi}{k} \quad j = 0, 1, \ldots, k$$

(zauważmy, że $x_0 = 1$, $x_k = -1$ są na brzegu $[-1,1]$ - to nie są maks lub min lokal.)

WŁASNOŚCI EXTREMALNE WIELOMIANÓW CZEBYSZEWA

TW. 1

Oznaczam $\tilde{\Pi}_k = \{w \in \Pi_k : w(x) = x^k + \text{wyrazy niższych rzędów}\}$

$\tilde{T}_k = \frac{1}{2^{k-1}} T_k \in \tilde{\Pi}_k$. $\quad \| \ \|_C = \| \ \|_{C[-1,1]}$ - ~~norma~~ jednostajna $= \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$

Wtedy $\|\tilde{T}_k\|_C \leq \|w\|_C \quad \forall_{w \in \tilde{\Pi}_k}$.

Dowód:

Nie wprost. $\exists\, w^* \in \tilde{\Pi}_k$, t. że

$\|w^*\|_C < \frac{1}{2^{k-1}} = \|\tilde{T}_k\|_C$, zatem

$\forall_{x \in [-1,1]} \quad |w^*(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}$

$y_0, y_1, \ldots, y_k$ - punkty ekstremalne dla $\tilde{T}_k$ w $[-1,1]$

$w^*(y_0) < \frac{1}{2^{k-1}} = \tilde{T}_k(y_0)$

$w^*(y_1) > -\frac{1}{2^{k-1}} = \tilde{T}_k(y_1)$

$\vdots$

Wielomian $v(x) = w^*(x) - \tilde{T}_k(x) \in \Pi_{k-1}$ - wiel. stp. $k-1$

zeruje się w przedziałom

(y_j, y_{j+1}) dla $j = 0, 1, \ldots, k-1$, k - zer, sprzeczność

TW. 2 ~~(bez dowodu)~~

załóżmy, że $|a|>1$, $A\neq 0$ — Dane.

Wtedy $\left\|\frac{A}{T_k(a)}T_k\right\|_C \leq \|w\|_C \quad \forall w \; \deg w = k$

$w(a) = A.$

Dowód:

jak poprzednio, tyle że

$\frac{A}{T_k(a)}T_k - w$ — jest ciągle wielomianem stopnia k,

bo nie znikną współczynniki przy najwyższej potędze.

CAŁKOWANIE GAUSSA-LEGENDRE'A

$$I_p(f) = \int_a^b f(x)\, p(x)\,dx \qquad p(x) \text{ - funkcja wagowa}$$

$a, b \in \mathbb{R}$

zakładamy, że

$\int |p(x)|\,dx < +\infty \quad p(x) \geq 0.$

$\sup p$ - gęsty w $(a, b]$

KWADRATURA G-L.

$$G_p^N(f) = \sum_{i=1}^{m} w_i(~~x_i~~) \cdot f(x_i) \qquad x_i \text{ - węzły}$$

tak aby była dokładna dla wielomianów stopnia $\leq 2n-1$ (tyle ile jest stopni w kwadraturze).

TW. G-L.

~~T~~ Jeśli węzły x_i, $i=1,\dots,n$ są zerami n-tego wielomianu ortogonalnego, to kwadratura Newtona-Cotesa oparta na tych węzłach jest dokładna dla wielomianów stopnia $\leq 2n-1$.

Dowód:

$G^N(w) = I_p(w)$ dla $w \in \Pi_{n-1}$ - wielomian stopnia $\leq n-1$

(bo Newton-Cotes)

Niech

$w \in \Pi_{2n-1}$

$w(x) = d(x)\,q_n(x) + r(x)$, gdzie

$\deg(r) < n$

q_n - n-ty wielomian ortogonalny

$\deg d(x) \leq n-1$

$$\int_a^b w(x)p(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b d(x)q_n(x)p(x)\,dx}_{=0} + \int_a^b r(x)p(x)\,dx$$

bo $q_n \perp d$

$$G^N(w) = \underbrace{G^N(d \cdot q_n)}_{=0} + G^N(r) = \int_a^b r(x)p(x)\,dx$$

0 bo zera naw węzłach

bo $\deg(r) \leq n-1$

$\boxed{\text{CM}}$

TW. ODWROTNE

jeśli $S_N = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ jest dokładna dla wielomianów stopnia $\leq 2n-1$, to x_i - są pierwiastkami n-tego wielomianu ortogonalnego.

Dowód:

$q_n(x) = (x-x_1) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)$

pokaże, że $q_n \perp w \quad \forall w \in \Pi_{n-1}$

$w \in \Pi_{n-1}$

$\deg(w \cdot q_n) \leq 2n-1$

$I(w q_n) = \int_a^b w(x) q_n(x) \cdot p(x) \, dx$

$\parallel$

$G(w \cdot q_n) = 0 \quad$ bo $\quad w q_n(t_i) = 0 \ \forall i$

więc $\quad q_n \perp w$.

$\blacksquare$

TW. WZÓR NA WAGI I ICH DODATNOŚĆ

~~w_i~~ Niech ~~$l_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{x-x_i}$~~

$$\tilde{l}_i(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots\widehat{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)$$ Gwiny

~~w_i~~

$$l_i(x) = \frac{\tilde{l}_i(x)}{\tilde{l}_i(x_i)}$$

Wtedy

$$w_i = \int_a^b l_i^2(x)\,p(x)\,dx > 0.$$

$$\sum w_i = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Dowód:

~~l_i^2~~ $\deg(l_i^2) \leq 2n-2$

$$I(l_i^2) = G^n(l_i^2) = w_i$$

$$\underset{\sum w_i}{\underset{\shortparallel}{I(1)}} = \int_a^b p(x)\,dx$$

$\blacksquare$