INTERPOLACJA TRYGONOMETRYCZNA (64)

Dane: $f:[0,2\pi]\longrightarrow \mathbb{C}$, podział $\Delta=\{x_0,\dots,x_{n-1}\}\subset[0,2\pi]$

Szukamy $c_0,\dots,c_{n-1}$ tak aby

(1) $$\sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx_k} = f(x_k) \quad k=0,1,\dots,n-1$$

TW. Jeśli $x_i\in[0,2\pi)$ $i=0,1,\dots,n-1$, $x_j\neq x_k$ $j\neq k$ to zagadnienie (1) ma dokładnie 1 rozwiązanie dla każdego układu $f_i=f(x_i)$.

Dowód:

Polega na sprawdzeniu, że macierz

$$A=(a_{kj})=\left(e^{ijx_k}\right)=\left(z_k^j\right) \qquad z_k=e^{ix_k}$$

jest nieosobliwa.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & z_{n-1} & z_{n-1}^2 & \dots & z_{n}^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{wyznacznik Vandermonde}$$

$$\prod_{i>j}(z_i-z_j)$$

o ile $z_s\neq z_t$. ∎

Inaczej

$A(c)=f$ – A – izomorfizm, bo $\ker A=\{0\}$

gdyż $\forall_k \sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{ijx_k}\right)\cdot c_j=0$ – wielomian st. $n-1$

z (n) pierwiastkami $z_k=e^{ix_k}$

zatem jest to wielomian zerowy, czyli $\ker A=0$.

OBLICZENIE WYZNACZNIKA VANDERMONDE'A

64.6

mozna pominąć

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i>j \\ i,j=0,\dots,n}} (z_i - z_j)$$

Dowód:

$n=1$ $\quad W_1 = \begin{vmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \end{vmatrix} = z_1 - z_0$

$$\begin{vmatrix} 1 & z_0 & \dots & z_0^n \\ 1 & z_1 & & z_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \dots & z_0^n \\ 0 & z_1 - z_0 & & z_1^n - z_0^n \\ \vdots & & & \\ 0 & z_n - z_0 & & z_n^n - z_0^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & z_1^2 - z_0^2 & \dots & z_1^n - z_0^n \\ z_2 - z_0 & z_2^2 - z_0^2 & \dots & z_2^n - z_0^n \\ \vdots & & & \\ z_n - z_0 & z_n^2 - z_0^2 & \dots & z_n^n - z_0^n \end{vmatrix}$$

odejmuję 1-y wiersz od innych

z każdego wiersza wyciągam $z_i - z_0$

$$= (z_1 - z_0) \cdot \ldots \cdot (z_n - z_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & z_1 + z_0 & z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2 & \dots & z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_0 + \ldots + z_0^{n-1} \\ 1 & z_2 + z_0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & z_n + z_0 & z_n^2 + z_n z_0 + z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} + z_1^{n-2} z_0 + \ldots + z_0^{n-1} \end{vmatrix}$$

od kolumny i-tej $\begin{vmatrix} z_1^i + z_1^{i-1} z_0 + \ldots + z_0^i \\ \vdots \\ z_n^i + z_n^{i-1} z_0 + \ldots + z_0^i \end{vmatrix}$ odejmuję $z_0 \cdot \begin{vmatrix} z_1^{i-1} + z_1^{i-2} z_0 + \ldots + z_0^{i-1} \\ \\ z_n^{i-1} + z_n^{i-2} z_0 + \ldots + z_0^{i-1} \end{vmatrix}$

$\Downarrow$ (i-1)-kolumna

i dostaję

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = W_{n-1}(z_1, \dots, z_n) \cdot (z_1 - z_0) \cdot (z_2 \ldots$$

c.n.u.

Przypadek równoodległych węzłów

$x_k = \frac{2\pi}{n} k \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$

TW. $A^* A = (n) I$

Dowód:

$$A = (a_{kj}) = \left(e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k \cdot j} \right)$$

$$\left(A^*\right)_{kj} = \overline{a_{jk}} = e^{-\frac{2\pi i}{n} k \cdot j}.$$

Oznaczmy $C = A^* A = (c_{ts})$

$$c_{ts} = \sum_{k=0}^{n-1} a^*_{tk} \cdot a_{ks} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_{kt}} \cdot a_{ks} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} k t} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n} k s} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} k (s-t)} = \sum_{k=0}^{n} \Big(\underbrace{e^{\frac{2\pi i}{n}(s-t)}}_{q} \Big)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q-1}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

~~jeśli $q \neq 1$, to s~~

$q \neq 1$ o ile $s \neq t$, wtedy $q^n = e^{2\pi i (s-t)} = 1 \Rightarrow c_{ts} = 0$

$q = 1$ dla $s = t \Rightarrow c_{ss} = n$.

Obliczenie współczynników c_j

$$A^* \,\big|\, Ac = f$$

$$n\,c = A^* f$$

$$c = \frac{1}{n} A^* f.$$

Zatem $c_k = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} a^*_{ks} f_s = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}ks} f_s$

TW.

Współczynniki wielomianu trygonometrycznego $t_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}$ opartego na węzłach $x_j = \frac{2\pi}{n} j$ są dane wzorem

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} f_s \bar{a}_{sk} = \frac{1}{n}\left(f, e^{ikx}\right)$$

gdzie

$$(u|v) = \sum_{s=0}^{n-1} u(x_s)\overline{v(x_s)}$$

INTERPOLACJA RZECZYWISTYMI FUNKCJAMI:

$$(1)\quad \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ij \cdot x_k} = f(x_k) = f_k \quad k=0,1,\dots,n-1$$

załóżmy, że $f_k \in \mathbb{R}$

chcielibyśmy mieć tylko funkcje rzeczywiste w tej interpolacji.

Będziemy rozważać przypadek węzłów ~~równego~~ równoodległych

$$x_k = \frac{2\pi}{n} \cdot k.$$

I PODEJŚCIE:

$$t_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ij \cdot x} \qquad e^{ikx} = \cos kx + i \sin x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_j \cos(jx) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j \sin(jx) +$$

$$+ i \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \sin(jx) + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \cos(jx) \right)$$

$\neq 0$, gdy choć jeden $a_j, b_j \neq 0$ (oczywiście jest zero na węzłach)

---

weźmiemy część Re:

mamy $2n+1$ - funkcji współczynników, dla n węzłów - brak jednoznacz

II Podejście

$e^{ijx} = \cos(jx) + i\sin(jx)$ ← wprowadza wszystkie szybkości j

ale na węzłach tej nie widzi, bo

$e^{ijx_k} = \overline{e^{i(n-j)x_k}}$

Dowód:

$$e^{i(n-j)x_k} = e^{i(n-j)\frac{2\pi}{n}k} = e^{-ij\frac{2\pi}{n}k} \cdot \underbrace{e^{i2\pi \cdot k}}_{=1} = e^{-ijx_k}$$

czyli miałoby sens brać do rozkładu funkcje

e^{ijx} dla $j = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$

Zachodzi:

$c_{n-k} = \overline{c_k}$, bo

$$c_{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} f_s e^{-i\frac{2\pi}{n}(n-k)s} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} f_s e^{+i\frac{2\pi}{n}ks} = \overline{c_k}.$$

dla $k=0$ $c_0 = \overline{c_0}$

jeśli $n = 2m$, to $c_m = \overline{c_m}$ oraz

~~jeśli $n=2$~~ na węzłach $e^{imx_k} = \cos(mx_k)$

Dowód:

$$e^{imx_k} = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot k\cdot m} = e^{i\pi k} = \cos(\pi \cdot k) + i\sin(\pi \cdot k) = \cos(mx_k).$$

Czyli można na ten wielomian trygonometryczny popatrzeć tak:

$$c_0 e^{i \cdot 0 \cdot x} + (c_1 e^{i1x} + c_{n-1} e^{-i \cdot 1x}) + (c_2 e^{i2x} + c_{n-2} e^{-i2x}) + \ldots$$

zgadza się na wyjście

definiujemy

$$c_{n-k} = c_{-k}$$

$$\overline{c_k} = c_{-k}$$

i mamy ~~sumę~~ ~~do porzuceń~~

$$c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + (c_2 e^{i2x} + c_{-2} e^{-i2x}) + \ldots$$

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = 2 \operatorname{Re}(c_k e^{ikx}) =$$

$$= 2(a_k \cos(kx) - b_k \sin(kx))$$

$$c_k = a_k + i b_k$$

t - rzeczywista

zauważmy, że dla n ~~[illegible]~~ nieparzystym mamy ~~może~~ wielomian interpolacyjny

$$t_n(x) = \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} c_k e^{ikx}$$

gdzie

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) e^{-ikx}.$$

~~Jedyne~~ trzeba uzasadnić, że

$$c_{-k} = \overline{c_k}$$

$$c_{-k} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) e^{-i(-k)x_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) e^{ikx_j} =$$

$$= \overline{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) e^{-ikx_j}} = \overline{c_k}. \blacksquare$$

POSTAĆ RZECZYWISTA WIELOMIANU INTERPOLACYJNEGO

TW.
Jeśli $f:[0,2\pi) \to \mathbb{R}$, to jej trygonometryczny wielomian interpolacyjny oparty na węzłach $x_k = \frac{2\pi}{n}k$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ może być przedstawiony jako

$$t_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{m-1}\left(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\right) + \cancel{\delta\frac{1}{2}a_{m+1}\cos(m+1)}$$
$$+ \delta\frac{1}{2}a_m\cos(m)x$$

gdzie
$\delta=1$, $m=\frac{n}{2}$ dla n - parzystych
$\delta=0$, $m=\frac{n-1}{2}$ dla n - nieparzystych
czyli $m = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$

$$a_j = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cos(jx_k)$$
$$b_j = \frac{-2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\sin(jx_k).$$

UWAGA:
mamy n - funkcji bazowych

$n=4$ - parzyste $1, \cos x, \sin x, \cos 2x$

$n=5$ $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x$

Dowód:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx} = c_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(c_j e^{ijx} + c_{n-j} e^{i(n-j)x}\right) + \delta c_m e^{imx}$$

na węzłach !!!

$$= c_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(c_j e^{ijx} + c_{n-j} e^{-ijx}\right) + \delta c_m \cos(mx)$$

$$c_{n-j} = \overline{c_j}$$

Uwaga te dwie linie to są różne funkcje ale zgadzają się na węzłach!!

zauważmy, że:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k$$

gdy n-parzyste, to $\delta = 1$ i wtedy

$$c_m = \overline{c_m} = \frac{1}{n} \sum f_s \cos(m x_s) = \frac{1}{2} a_m$$

$$c_j e^{ijx} + \overline{c_j} e^{-ijx} = 2\,\mathrm{Re}(c_j e^{ijx}) =$$

$$= 2\left((\mathrm{Re}\, c_j) \cos(jx) - \mathrm{Im}(c_j) \sin(jx)\right)$$

$$2\,\mathrm{Re}\, c_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos(j x_k) = a_j$$

$$2\,\mathrm{Im}\, c_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0} f_k \sin(j x_k) = -b_j$$

$\blacksquare$

FFT - szybka transformacja Fouriera

$x_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, \dots, N-1$

Ozn. $f(k) = f(x_k)$

Zadanie:

(ZA) - analiza Fouriera

dane $f(0), \dots, f(N-1) \in \mathbb{C}$

Szukamy

$$C(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-ij\frac{2\pi k}{N}}, \text{ dla } j = 0, 1, \dots, N-1$$

(ZS) - synteza Fouriera (zadanie odwrotne do ZA)

Dane:

$C(0), C(1), \dots, C(N-1)$

Szukamy:

$$f(k) = \sum_{j=0}^{N-1} C(j) e^{ij\frac{2\pi k}{N}}.$$

Klasyczny algorytm wymaga:

około $(N)^2$ zespolonych mnożeń i dodawań

oraz obliczenia $e^{-ij\frac{2\pi k}{N}}$.

FFT - o wiele szybszy.

(Cooley i Tukey)

Jeśli $N = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_p$ - rozkład na czynniki pierwsze

to

Liczba dodawań i mnożeń jest rzędu

$(N)(r_1 + \ldots + r_p)$. Dla $N = 2^k$, dostajemy $(N)\log_2(N)$

FFT.

Zagadnienie: (2A) i (2S) wymagają obliczeń

$\cancel{\sum a_k \omega^j}$ $b_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{j \cdot k}$, gdzie $\omega = e^{\pm 2\pi i/N}$

$\omega^N = 1$

Okazuje się, że da się to fajnie zoptymalizować.

$F_N(a)_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{jk}$

$N=2$

$b_0 = a_0 + a_1$ $\omega^2 = 1$, $\omega = -1$

$b_1 = a_0 - a_1$

$N = 4$ $\omega^4 = 1$ $\omega = e^{\pm i \frac{2\pi}{4}}$ $\omega^2 = -1$

$b_0 = (a_0 + a_2) + (a_1 + a_3)$

$b_1 = (a_0 + \omega^2 a_2) + \omega(a_1 + \omega^2 a_3)$

$b_2 = (a_0 + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\omega^4}} a_2) + \omega^2(a_1 + \omega^4 a_3)$

$b_3 = (a_0 + \omega^2 a_2) + \omega^3(a_1 + \omega^2 a_3)$

$(\omega^3)^2 = \omega^6 = \omega^2$ $a_3 \cdot (\omega^3)^3 = a_3 \cdot \omega^9 = \omega^3 a_3 \cdot \underset{\omega^2}{\underset{\shortparallel}{\omega^6}}$

ω^2 - jest $= e^{\pm i \frac{2\pi}{2}}$ - pierwiastek 2-go stopnia z 1-

mamy

$(a_0 + a_2)$ $(a_1 + a_3)$ $F_2(a_0, a_2)$

$(a_2 + \omega^2 a_2)$ $(a_1 + \omega^2 a_3)$ $F_2(a_1, a_3)$

$$F_4(a_0,a_1,a_2,a_3) = \begin{bmatrix} F_2(a_0,a_2)_0 + F_2(a_1,a_3)_0 \\ F_2(a_0,a_2)_1 + \omega F(a_1,a_3)_1 \\ F(a_0,a_2)_0 + \omega^2 F(a_1,a_3)_0 \\ F(a_0,a_2)_1 + \omega^3 F(a_1,a_3)_1 \end{bmatrix}$$

$\underline{N = 8 = 2^3}$ $\qquad \omega = e^{\pm\frac{2\pi i}{8}} \qquad \omega^2 = e^{\pm\frac{2\pi i}{4}}$

$$b_0 = (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) + (a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$$

$$b_1 = (a_0 + a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + a_6\omega^6) + \omega(a_1 + \omega^2 a_3 + \omega^4 a_5 + \omega^6 a_7)$$

$$b_2 = (a_0 + a_2\omega^4 + a_4\omega^8 + a_6 \underset{\omega^{12}}{\overset{\shortparallel}{\omega^4}}) + \omega^2(a_1 + a_3\omega^4 + a_5\omega^8 + a_7\omega^4)$$

$$a_7(\omega^2)^7 = a_7\omega^{14} = \omega^2 a_7 \omega^{12} \qquad \omega^{12} = \omega^4$$

$$b_3 =$$

$$b_4 =$$

$$b_5 = (a_0 + a_2 \underset{\omega^{10}}{\overset{\shortparallel}{\omega^2}} + a_4\omega^4 + a_6) + \omega^5(\quad \ldots \quad)$$

Ogólnie

$$F(a_0,a_1,\ldots,a_{2^k-1})_i = \begin{cases} F(a_0,a_2,\ldots,a_{2^k-2})_i + \omega^i F(a_1,a_3,\ldots,a_{2^k-1})_i, & i < 2^{k-1} \\ F(a_0,a_2,\ldots,a_{2^k-2})_{i-2^{k-1}} + \omega^i F(a_1,a_3,\ldots,a_{2^k-1})_{i-2^{k-1}}, & i \geq 2^{k-1} \end{cases}$$

Daje to algorytm rekurencyjny.

POŻYTEK Z FFT

w kontekście równań cząstkowych

Problem

$$u_t = u_{xx} + u^2$$

z okresowymi warunkami brzegowymi

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x)$$

Metoda spektralna:

$$u(t,x) = \sum a_k(t) e^{ikx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum a_k'(t) e^{ikx}$$

$$u_{xx}(t,x) = \sum a_k(t)(-k^2) e^{ikx}$$

$$u^2(t,x) = \left(\sum a_{k_1} e^{ik_1x}\right)\left(\sum a_{k_2} e^{ik_2x}\right) =$$

$$= \sum_k \left(\sum_{k_1+k_2=k} a_{k_1} a_{k_2}\right) e^{ikx} =$$

$$= \sum_k \left(\sum_{k_1} a_{k_1} a_{k-k_1}\right) e^{ikx}$$

czyli na współczynnikach:

$$a_k' = -k^2 a_k + \sum_{k_1} a_{k_1} a_{k-k_1}.$$

projekcja Galerkina:

bierzemy tylko a_k $k=-n,\ldots,n$

obliczenie splotu

$$\sum a_{k_1} a_{k-k_1} \quad \sim N^2 \text{ mnożeń}$$

użycie transformaty FFT na $2N$ węzłach

$a_k \rightsquigarrow u \quad \leftarrow$ FFT $O(2N)(\log(2N))$

u^2 na węzłach N - operacji

$u^2 \longrightarrow a_k(u^2)$ - FFT

$O(2N \log(2N))$

czyli całości

$O(N \log N)$.

TROCHĘ INFORMACJI O SZEREGACH FOURIERA I FUNKCJACH OKRESOWYCH

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ całkowalna

szereg Fouriera f:

$$f \sim \sum a_k e^{ikx}$$

gdzie $$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx.$$

TW. 1

$f \in C^1$, to $f(x) = \sum a_k e^{ikx}$.

Dowód długi i trudny. - jądro Dirichleta itp.

SZYBKOŚĆ ZBIEŻNOŚCI:

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx.$$

TW.

$$a_k(f') = (ik)\, a_k(f)$$

Dowód:

$$2\pi a_k(f') = \int_0^{2\pi} f'(x)\, e^{-ikx}\,dx = f(x)e^{-ikx}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x)(-ik)e^{-ikx}\,dx$$

$$= 0 + 2\pi(ik)\, a_k(f) \;\blacksquare$$

zatem

$$a_k\left(f^{(s)}\right) = (ik)^s a_k(f).$$

TW.

$$|a_k(f)| \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

TW.

$f \in C^s$, to

$$|a_k(f)| \leq \frac{\sup_{x\in[0,2\pi]} |f^{(s)}(x)|}{|k|^s}$$

zatem $\sum a_k e^{ikx}$ - szybko zbieżny.

Dla analitycznych jest lepiej

TW.

f - analityczna i okresowa wtw

$\exists M \ \exists_{0\leq \varrho < 1} \quad |a_k| \leq M \varrho^{|k|}$.

spadek geometryczny współczynników

KWESTIA ZBIEŻNOŚCI INTERPOLACJI TRYG. DO FUNKCJI

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l e^{ilx}$$

$- f \in C^{\infty}$ – zbieżny bardzo szybko jednostajnie szereg

wszczypnięta

WZÓR NA WSPÓŁCZYNNIKI INTERPOLACJI:

zakładam węzły równoodległe

$$x_k = \frac{2\pi}{n} k$$

TW.

$$c_j = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{j+sn}$$

Dowód:

$$c_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) e^{-ijx_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} \cdot k\right) e^{-i\frac{2\pi}{n}kj} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l e^{i\frac{2\pi}{n}k \cdot l} \right) e^{-i\frac{2\pi}{n}kj} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l e^{i\frac{2\pi}{n}k(j-l)} =$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}k(j-l)}}_{= \begin{cases} 1, & \text{gdy } j-l = s \cdot n \quad s \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}}$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{j+sn} \quad \blacksquare$$

TW. Błąd interpolacji trygonometrycznej:

$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ $\quad e^2$

n - nieparzyste, $m = \frac{n-1}{2}$

$$t_m(t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$$

Wtedy

$$|f(x) - t_m(t)| \leq 2 \sum_{s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sin\left(\frac{nsx}{2}\right) \sum_{k=-m}^{m} |a_{k+ns}|$$

$$\leq \sum_{|k|>m} |a_k|$$

Dowód

$$t_m(x) - f(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l e^{ilx} =$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{k+s \cdot n} \right) e^{ikx} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l e^{ilx} =$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left(a_{k+s \cdot n} e^{ikx} - a_{k+sn} e^{i(k+sn)x} \right) =$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{k+sn} \left(1 - e^{insx} \right) =$$

$$1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} \right) =$$

$$= -2i \sin\frac{x}{2} \, e^{i\frac{x}{2}}$$

$$=(-2i)\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_{k+sn} \sin\left(\frac{n\cdot sx}{2}\right) e^{i\frac{nsx}{2}} =$$

ważne!!

$$\cancel{= (-2i) \sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{k=-m}^{m} a_{k+sn}}$$

$$=(-2i)\sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sin\left(\frac{n\cdot s\cdot x}{2}\right) e^{i\frac{nsx}{2}} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} a_{k+sn}$$

$$|t_n(x)-f(x)| \le 2 \sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\sin\left(\frac{ns\cdot x}{2}\right)\right| \sum_{k=-m}^{m} |a_{k+sn}| \le$$

$$\le 2\sum_{|k|>m} a_k . \qquad \boxed{}$$

UWAGI:

zauważmy, że na węzłach:

$$|t_n(x_k)-f(x_k)|=0 \quad \text{, bo}$$

$$\sin\left(\frac{ns\cdot x_k}{2}\right) = \sin\left(ns\,\frac{2\pi}{2n}\cdot k\right) = \sin(\pi s k) = 0$$