(zadania na 16.III)

1. Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów kratowych (tzn. takich, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi). Udowodnić, że środek co najmniej jednego z odcinków łączących te punkty też jest punktem kratowym. Sformułować i udowodnić analogiczne stwierdzenie dla przestrzeni n-wymiarowej.*

2. Każdy punkt kratowy płaszczyzny pomalowano na biało lub czarno. Pokazać, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wszystkich wierzchołkach w tym samym kolorze.

3. Rozważamy zbiór A zawierający pewne liczby dwucyfrowe. Pokazać, że:
   a) jeśli A ma 10 elementów, to istnieją dwa rozłączne (niepuste) podzbiory A o tej samej sumie elementów,
   b) jeśli A ma 11 elementów, to istnieją dwa (różne) podzbiory 5-elementowe A o tej samej sumie elementów.

4. Każdego dnia wrzucamy do skarbonki pewną liczbę złotówek (przynajmniej jedną dziennie). Po 100 dniach zebraliśmy w ten sposób 170 złotych. Pokazać, że istnieje ciąg następujących po sobie dni, podczas których wrzuciliśmy do skarbonki dokładnie 29 złotych.

5. Ile jest rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z równania $x + y + z = 100$
   a) jeśli $x, y, z > 0$, b) jeśli $x, y, z \geqslant 0$, c) jeśli $-20 \leqslant x < 50$, $-10 \leqslant y < 60$, $0 \leqslant z \leqslant 60$?

6. W grupie 200 studentów 150 osób zna język angielski, 80 niemiecki a 30 francuski. Wiadomo też, że angielski i niemiecki jednocześnie zna 35 osób, angielski i francuski 20 osób, a niemiecki i francuski 10. Wszystkie trzy języki zna 5 osób. Ilu studentów zna wyłącznie język niemiecki? Ilu nie zna żadnego z wymienionych języków?

7. Ile jest dodatnich liczb całkowitych mniejszych niż 1000 i niepodzielnych przez żadną z liczb 2, 3, 5?

8. Znaleźć liczbę zer na końcu rozwinięcia dziesiętnego liczby 2012! (silnia).

9. Ile liczb naturalnych mniejszych niż 10000 ma w zapisie dziesiętnym:
   a) każdą z cyfr 3, 6 i 9 przynajmniej raz,
   b) choć jedną z cyfr 3, 6 lub 9?

10. Przez pustynię idzie karawana składająca się z 7 wielbłądów. Po wielu dniach podróży, każdemu z nich obrzydło już widzieć przed sobą cały czas tego samego towarzysza. Na ile sposobów można zmienić kolejność wielbłądów w karawanie tak, aby przed każdym szedł inny niż poprzednio?

11. Sekretarka ma 10 zaadresowanych kopert oraz 10 listów do wysłania. Na ile sposobów może umieścić listy w kopertach tak, aby żaden list nie trafił do adresata? Podać ogólny wzór dla liczby kopert i listów wynoszącej n.*

12. Dane są zbiory $X = \{1, \ldots, m\}$ oraz $Y = \{1, \ldots, k\}$, przy czym $m \geqslant k \geqslant 1$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon X \to Y$, które nie są surjekcjami (nie korzystając z liczb Stirlinga).